cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques

Nicolas Balacheff, Claire Margolinas

NICOLAS BALACHEFF ET CLAIRE MARGOLINAS

cK¢
MODELE DE CONNAISSANCES POUR LE CALCUL DE SITUATIONS DIDACTIQUES

I. INTRODUCTION

1. Point de vue préliminaire sur la modélisation des connaissances et son rôle en didactique

La différence entre savoir et connaissance est l'un des fondements essentiels de la théorie des situations didactiques (TSD), théorie conçue et développée par Guy Brousseau. Cette différence, qui émerge des rapports de l'individu aux institutions, est à l'origine de l'impossibilité de la transmission « directe » du savoir à laquelle répond la nécessaire transposition didactique, ce qu'a montré Yves Chevallard (1985/1991). Si l'institution, au moins partiellement, se donnent les moyens d'expression, de caractérisation et d'organisation des savoirs, en revanche ces questions sont ouvertes pour les connaissances. Les questions qui en découlent sont nombreuses : qu'est-ce qui caractérise une connaissance ? comment une connaissance évolue-t-elle ? une connaissance peut-elle être plus ou moins proche d'un savoir ? etc.

Quand on s'intéresse non seulement aux théories didactiques, mais aussi à la construction des *Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain* (EIAH) ces questions s'imposent d'une façon très concrète puisqu'il faut aboutir à des éléments calculables par une machine. Notamment, ce qui permet de reconnaître une connaissance et de l'opposer à une autre demande de comprendre ce qui, parmi les productions identifiables par la machine, peut-être considéré comme appartenant à un modèle donné *a priori* ; il faut, en quelque sorte, automatiser l'analyse a priori, composante classique de la didactique des mathématiques. Plus encore, les moyens d'observation et d'analyse du chercheur-observateur doivent être modélisés et implémentés pour qu'une une machine, d'une certaine façon, joue son rôle dans l'interprétation des connaissances.

Ainsi, les nécessités particulières de la recherche sur les EIAH conduisent à chercher une modélisation fonctionnelle des connaissances en opérant des distinctions qui semblent en retour utile pour la didactique des mathématiques dans son ensemble.

Ce cours[1] a permis de revisiter plusieurs textes (voir bibliographie) plus ou moins disponibles et d'en faire une synthèse, tout en explicitant les différents ancrages de mon travail.

2. Rappels sur la théorie des situations didactiques

La TSD modélise un système éducatif par les relations entre des systèmes :

- un système «enseignant» défini par les relations qu'il entretient avec un système «enseigné» ;

[1] Le texte qui suit est la rédaction du cours donné à l'école d'été par Nicolas Balacheff. Cette rédaction a été réalisée à partir d'un ensemble de notes mises en forme et complétées par Claire Margolinas. Pour simplifier l'écriture les auteurs s'expriment à la première personne dans la suite du texte.

Mercier A. & Margolinas C. (ed.), *Balises pour la didactique des mathématiques*, pp. 1 – 32.

- une situation d'enseignement comme jeu spécifique du savoir visé entre différents sous-systèmes : le système didactique, le système élève, le milieu, etc.

L'enjeu de cette modélisation est de décrire ces sous-systèmes par le seul recours aux relations qu'ils entretiennent. Il y a deux types distincts de jeux :

- Les jeux de l'élève avec le milieu adidactique ;
- Les jeux du maître organisateur de ces jeux de l'élève.

La TSD caractérise chaque connaissance par les situations qui lui sont spécifiques. Cette « spécificité » est une contrainte essentielle : il s'agit de construire un milieu, système antagoniste du système enseigné, tel que les stratégies des élèves soient motivées par les nécessités de leurs relations avec le milieu.

Les sens d'une décision de l'élève peuvent être modélisés à l'aide de :

- L'ensemble des choix envisagés par l'élève et rejetés par un choix retenu ;
- L'ensemble des stratégies que le chercheur considère qu'elles soient envisagées par l'élève ou non, retenues ou non ;
- Les conditions du jeu qui déterminent le choix retenu.

3. Relecture de la TSD

Le premier problème associé à la TSD est de pouvoir caractériser l'enjeu de l'apprentissage, notons le O (ainsi que Chevallard (1992) le fait dans la formalisation qu'il propose du didactique). Nous distinguons deux plans :

- Plan théorique : O est caractérisé par une situation S dans laquelle il est un moyen de résolution du problème P ;
- Plan méthodologique : O est caractérisé par un ensemble d'événements {ei} observables dans S lors de la résolution de P.

Les observables {ei} peuvent consister en des productions langagières, symboliques, matérielles, voire comportementales. Ainsi, on peut considérer le résultat des interactions entre système didactique, système enseigné et milieu comme le lieu d'inscription de l'interaction et des productions. Par la suite, nous parlerons d'agent didactique et d'agent apprenant. Le terme *d'agent*, courant dans la communauté informatique, réfère à des systèmes autonomes, humains ou artificiels, capables de représentation, de traitement, et de communication (figure 1).

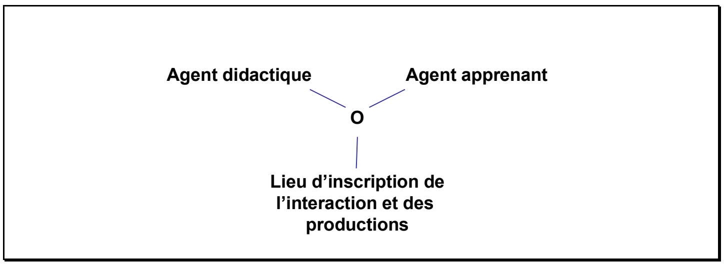


Figure 1. Agent didactique, agent apprenant

Les *observables*, c'est-à-dire les comportements et leurs résultats, sont premiers dans notre rapport à la fois théorique et pragmatique à notre objet de recherche parce qu'ils sont les indices de la correspondance ou de l'écart entre l'enjeu de l'apprentissage O pour l'agent apprenant et pour l'agent didactique. Notre modélisation devra donc prendre en compte la façon dont ces observables sont constitués, c'est-à-dire la modélisation de l'observateur et de son rapport avec l'observé.

Dans la TSD, la correspondance entre comportement et connaissance est justifiée « par l'interprétation des situations problèmes en termes de jeu, et des comportements en termes d'indices des stratégies dont il faut montrer le caractère adapté dans le modèle ou la représentation attribuée à l'élève » (Brousseau 1998, p.77).

L'interprétation des comportements n'est pas immédiate parce que, d'une part, le sens des situations est a priori différent pour l'agent didactique et pour l'agent apprenant (c'est le problème central de la dévolution), d'autre part, pour l'agent apprenant, P superpose l'attente de l'agent didactique et les nécessités intrinsèques à O.

> «L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire dans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée situation adidactique.» (Brousseau 1998, p.59).

Du point de vue des observables, il s'agit donc de distinguer un sujet dans un ensemble formé de sujets et de systèmes matériels ; cet ensemble constitue le milieu pour ce sujet distingué (figure 2).

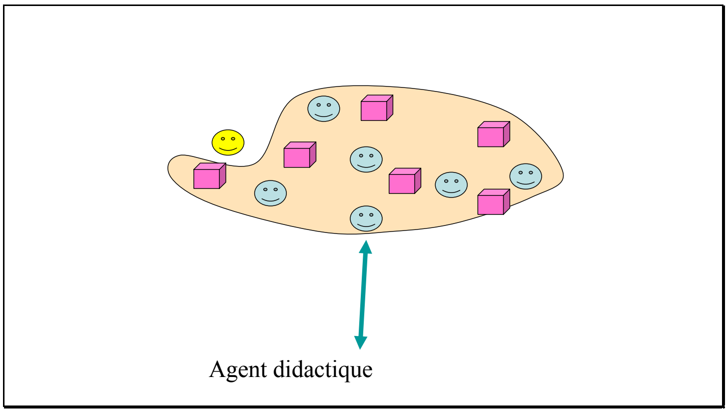


Figure 2. Le sujet distingué

4. Première réduction : le adidactique

La première réduction que nous opérons pour construire le modèle cK¢ est de restreindre notre étude à celle du adidactique (figure 3).

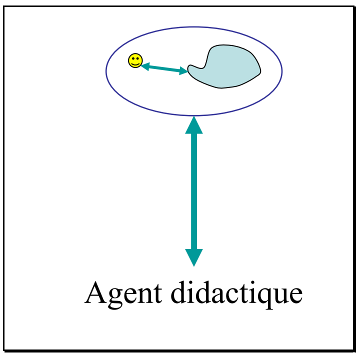


Figure 3. Le sujet distingué, le système, sa réduction

Dans le cadre de la TSD, il s'agit d'une réduction légitime car le adidactique :

- est premier sur le didactique dont il est la finalité et la référence ;
- est centré sur la capacité du système [sujet<>milieu] à évoluer sous des contraintes spécifiques vers un état jugé à l'aune de l'enjeu d'enseignement-apprentissage.

Le adidactique est électivement lié à l'état symptomatique d'une *conception*.

Le terme de «conception» répond à deux nécessités (Artigue 1991). La première est de :

> « Mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique, différencier les représentations et modes de traitement qui lui sont associés, mettre en évidence leur adaptation plus ou moins bonne à la résolution de problèmes. » (p. 265)

Les points importants à retenir de cette citation sont d'une part la pluralité reconnue des *points de vue* sur un même objet, et d'autre part la manifestation de cette pluralité par la diversité des représentations et des traitements. Ce qu'Artigue désigne ici comme des points de vue, n'est autre que le sens donné *in situ* par l'élève ou l'enseignant et ce qui est en question est la pluralité des instances de la connaissance que nous reconnaissons par la diversité de ses représentations et de ses traitements. La modélisation que nous visons devra en rendre compte.

La deuxième nécessité est d'ordre méthodologique, la conception :

> «Aide le didacticien à […] différencier le savoir que l'enseignement veut transmettre et les connaissances effectivement construites par l'élève.» (p. 265)

5. Conception

Le terme de «conception» apparaît donc comme un outil pour la construction d'un concept permettant la modélisation de l'élève en tant qu'agent apprenant.

Dans une problématique cognitive, ou plus précisément psychologique, Vergnaud (1982) propose d'utiliser le terme de « conception » pour désigner l'analogue-sujet du concept, à un moment donné.

Le caractère local de la conception est fortement souligné dans tous les travaux :

- connaissances locales, opérantes sur des sous-clans du champ conceptuel, et pour certaines valeurs des variables des situations concernées, c'est ce savoir local que nous appelons conception (Duroux 1983) ;
- dans la pratique, c'est ce niveau local, relié à tel point de vue sur le savoir en jeu, qui est utilisé (Artigue 1991).

Dans les recherches, apparaissent sous le nom de modèle des conceptions du sujet, des objets divers qui vont de la construction axiomatique à la technique de résolution d'un problème précis (Artigue 1991).

Ce caractère de localité de la connaissance de l'apprenant ne s'oppose pas à ce que leur soient reconnues les caractéristiques essentielles d'une connaissance :

> « Les connaissances locales sont des connaissances limitées. Au titre de connaissances, elles sont valides, cohérentes et efficaces […] » (Léonard et Sackur 1991, p. 211).

En précisant :

- validité : «mathématiquement correctes, vraies, valides» ;
- cohérence : «organisation psychologiquement nécessaire» ;
- efficacité : «adaptation à la situation scolaire» (le « domaine de validité coïncide avec la majorité des questions posées en classe »).

Ces connaissances locales «possèdent chacune de ces propriétés dans certaines limites que l'utilisateur ignore» (ibid.).

Validité et efficacité sont des caractéristiques distinctives qui invitent à considérer ces connaissances de l'agent apprenant comme des connaissances de plein droit mais locales, et donc d'un ordre différent de connaissances qui, elles, ne le seraient pas. Une opposition essentielle sépare ainsi de fait les connaissances enjeux d'apprentissage et celles construites par l'apprenant.

On peut donc résumer en proposant qu'une conception est une instance de la connaissance de l'apprenant, qui se distingue par la représentation et les traitements qu'elle mobilise, et mais dont la porté est locale, attestée sur un domaine de validité et d'efficacité particulier (éventuellement scolaire).

Cette localité soulignée ne s'oppose pas à un parallélisme fort entre caractérisation de la connaissance mathématique et de la connaissance de l'apprenant. En témoignent ces éléments de caractérisation proposés par Artigue (1991, p.271) pour un concept mathématique :

- La notion mathématique telle qu'elle est définie dans le contexte du savoir savant à une époque donnée ;
- L'ensemble des signifiants associés au concept ;
- La classe des problèmes dans la résolution desquels il prend son sens ;
- Les outils : théorèmes, techniques algorithmiques, spécifiques du traitement du concept.

Cette caractérisation est à rapprocher, du côté des conceptions du sujet (ou agent apprenant) à celles-ci :

- La classe des situations problèmes qui donnent son sens au concept pour l'élève ;
- L'ensemble des signifiants qu'il est capable de lui associer, en particulier les images mentales, les expressions symboliques ;
- Les outils, les théorèmes, les algorithmes dont il dispose pour manipuler le concept.

En rapprochant ces deux listes, on remarque qu'à l'égal d'une conception, le concept mathématique réfère lui aussi à l'historicité du savoir savant, la localisation du savoir à un domaine électif d'usage, même si pour le savoir savant il semble s'agir d'un sens en soi, alors que pour la conception elle réfère à l'apprenant. Enfin, si les outils sont de même nature en revanche on constate l'insertion des images mentales parmi les signifiants dans le cas de la conception (on peut s'en étonner parce qu'usuellement les images mentales relèvent du signifié et non du signifiant).

En somme, toutes ces approches convergent sur le fait que relativement à un concept donné, la connaissance d'un sujet peut s'actualiser en des conceptions distinctes selon les caractéristiques des situations. Les éléments de caractérisation sont alors les problèmes dont la dévolution est le résultat des situations, les systèmes de représentation et les moyens de traitement (action et décision).

Vergnaud (1991 p. 145) a formalisé la notion de « conception », formalisation qu'il qualifie de pragmatique, en utilisant de fait ces trois caractéristiques :

- S : situations qui donnent du sens au concept (la référence) ;
- I : invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ;
- $\mathbb{S}$: formes langagières ou non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).

6. Seconde réduction : le [sujet<>milieu]

Dans la problématique de la TSD, le sujet et le milieu se définissent mutuellement et dialectiquement par la nature et la dynamique du jeu de leurs actions et rétroactions. « Le milieu est le système antagoniste du système enseigné, ou plutôt précédemment enseigné » (Brousseau 1998 p.93).

Comme le dit Vergnaud (1991) : « En dernier ressort, c'est l'action du sujet en situation qui constitue la source et le critère de la conceptualisation » (p. 166).

Il ne s'agit pas, ici, de savoir « comment le sujet pense » mais de considérer que le système cognitif n'est pas le sujet mais le système [sujet<>milieu], que nous considérons en tant que tout et non pas comme deux systèmes indépendants.

II. DEFINITION DE « CONCEPTION », LE MODELE cK¢

Nous pouvons maintenant définir la conception dans le modèle cK¢.

La conception est l'état d'équilibre d'un système, et plus précisément l'état d'équilibre d'une boucle action/rétroaction du système [sujet<>milieu] sous des contraintes proscriptives de viabilité (figure 4).

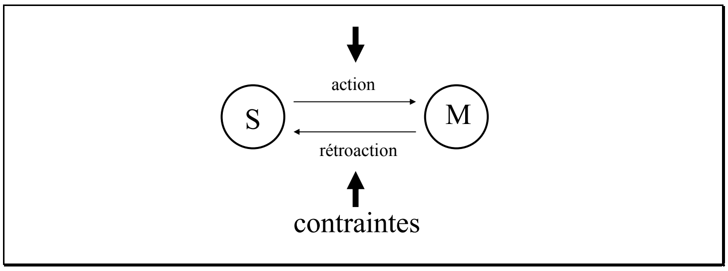


Figure 4. Boucle de rétroaction du système [sujet<>milieu].

Il existe a priori plusieurs voies permettant de revenir à l'équilibre d'un même système et non pas une seule. Le terme de *proscriptif*, utilisé par Stewart (1994, pp. 25-26), réfère à la nécessité des conditions qui assurent l'équilibre d'un système, qui ne sont pas *prescriptives* parce qu'elles ne requièrent pas un processus particulier pour revenir à l'équilibre recherché. Ces contraintes proscriptives ne renvoient pas à la façon dont l'équilibre est atteint mais aux *critères* de cet équilibre.

Nous en venons maintenant à une définition de conception qui réalise une synthèse des caractérisations et définitions jusqu'ici proposées, en prenant de façon forte une distance vis-à-vis du sujet comme seule référence de cette caractérisation (ce qui relèverait d'une problématique psychologique).

Nous appelons *problèmes* les perturbations du système. Le domaine de la validité de la conception, ou sphère de pratique, est constitué de l'ensemble des problèmes que la conception permet de résoudre et qui ne conduisent pas à une rupture de l'équilibre du [sujet<>milieu].

Nous appelons *opérateur* ce qui permet la transformation des problèmes ; ces opérateurs sont attestés par des productions et des comportements.

Un *système de représentation* (langagier ou non) permet l'expression des problèmes et des opérateurs.

Enfin, une *structure de contrôle* assure la non contradiction de la conception et contient au moins sous la forme d'oracles les outils de décision sur la légitimité de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état (résolu ou non) d'un problème.

Une « conception » est caractérisée par un quadruplet composé de :
P : un ensemble de problèmes
R : un ensemble d'opérateurs
L : un système de représentation
∑ : une structure de contrôle

1. Exemple : l'algorithme de l'addition

Cet exemple est très simple, mais il permet de façon efficace de montrer l'intérêt des quatre composants proposés pour formaliser une conception. L'addition, comme d'ailleurs le trois autres opérations élémentaires de l'arithmétique, a été largement étudiée. Les travaux, dont ceux notamment de Vergnaud sur les structures additives, ont mis en évidence la complexité psychogénétique de l'addition d'une part, en analysant ce que doit cette complexité à la structure des problèmes additifs et ce qu'elle doit aux algorithmes qui peuvent être mis en place selon les systèmes de représentation et de traitement des nombres disponibles.

Ce premier exemple se limite au cas de l'algorithme de l'addition (abusivement désigné par addition comme objet d'enseignement) et au prix d'une schématisation un peu forte, nous permet d'avoir une première appréciation de l'intérêt de la caractérisation proposée. On notera qu'il s'agit d'un cas dans lequel ce qui distingue les conceptions n'est pas leur caractère local en théorie ou leur fausseté, mais leur efficacité et leur dépendance à un type de représentation.

Conception 1 : « comptine » IIIII & IIII
P : problèmes du type : Ces deux collections de 5 objets e 4 objets font ensemble combien d'objets ? (Les collections sont présentes, distinctes et manipulables, les nombres sont petits).
R : pointer et nommer deux collections distinctes, en commençant par la première et en continuant par la seconde pour obtenir le nombre total.
L : geste pointer/nommer, comptine orale.
∑ : contrôle du nombre obtenu; contrôle de la procédure.
Conception 2 : surcomptage 16 & 4
P : problèmes du type : Combien font 16 et 4 ? (Les nombres sont nommés, les collections sont absentes, un des nombres ne doit pas dépasser environ 10).
R : prononcer les nombres tout en déployant les doigts successivement.
L : geste du déploiement des doigts, comptine orale à partir d'un nombre donné.
∑ : contrôle auro-visuel de la correspondance entre le nombre de doigts déployés et les nombres énumérés, le contrôle de l'énoncé de la comptine.
Conception 3 : addition « décimale » 16+23
P : Tout problème d'addition à deux ou plusieurs nombres entiers
R : Algorithme (usuel) de l'addition
L : écriture décimale des nombres
∑ : contrôle pas à pas de l'algorithme.
Conception 4 : calculatrice [1][6][+][2][3][=]
P : Tout problème d'addition à deux ou plusieurs nombres entiers ou décimaux relatifs
R : Suite des touches de la calculatrice
L : Gestes sur les touches et affichages successifs sur l'écran
∑ : contrôle des gestes sur les touches.

2. Remarques sur la définition **C=(P,** R, **L, ∑)** *et questions ouvertes*

2.1 La question des problèmes (P)

Un problème P est défini comme la perturbation du système [sujet<>milieu], ce qui implique :

- la capacité intellectuelle et sensorielle du sujet à identifier une perturbation ;
- la capacité matérielle et fonctionnelle du milieu d'attester de la perturbation.

La situation est nécessaire comme source de la perturbation et justification de l'intérêt qui lui est porté : elle permet la dévolution.

La difficulté est de caractériser une conception par les problèmes dans lesquels elle est impliquée, soit par des problèmes générateurs, soit par les caractéristiques de sa sphère de pratique. Comme je l'ai déjà défendu dans un autre cours de l'école d'été (Balacheff 1995), sans reprendre l'ensemble de mon argumentation, je peux dire qu'il s'agit de trouver une solution qui permette d'éviter de renvoyer à un ensemble de situations trop large (comme ce pourrait être le cas chez Vergnaud), tout en évitant également d'associer une conception à un ensemble de problèmes spécifiques mais difficilement constructible (comme le suggère Brousseau à partir du concept épistémologique de situation fondamentale). En fait, on est actuellement le plus souvent ramené à une caractérisation pragmatique, fondée sur une exploration de la sphère de pratique probable de la conception à laquelle on s'intéresse.

2.2 La question des représentations (L)

Les représentations permettent l'expression des contrôles, des actions et des problèmes, pour l'anticipation et la validation. Les modalités de représentation présentent une grande diversité : représentations langagières et non langagières, éventuellement constituées en registres sémiotiques.

Ancrage 1 : les « registres sémiotiques » au sens de Duval

Un registre sémiotique (Duval 1995) se distingue d'un système de représentation général par le fait de disposer des quatre composants suivants :

(i) Des traces identifiables comme une représentation de quelque chose ;

(ii) Des règles de transformation pour produire d'autres représentations pouvant constituer un apport de connaissances ;

(iii) Des règles de conversion vers un autre système de représentation pour expliciter d'autres significations

(iv) Des règles de conformité pour la constitution des unités de niveau supérieur.

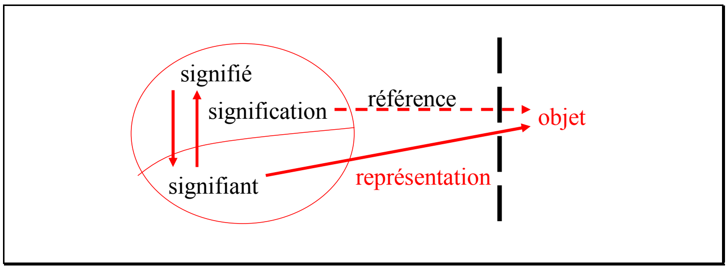


Figure 5. Registre sémiotique

En mathématique, l'objet mathématique est seulement disponible par le biais d'une représentation, on retrouve l'aphorisme de Houzel : les mathématiques sont une théorisation du déjà théorisé.

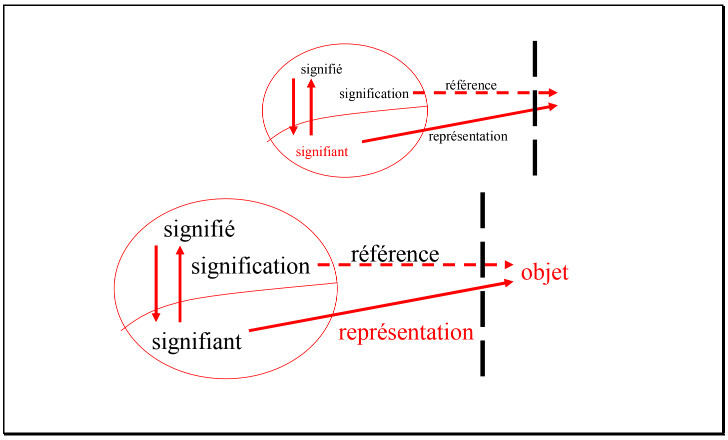


Figure 6. Registre sémiotique en mathématiques

Dans cette perspective, l'apprentissage peut apparaître comme le produit d'un jeu dialectique entre ancienne représentation et représentation en construction, suscité par les contraintes d'une situation. Ainsi le concept mathématique (ou son substitut didactique) serait-il assimilé à sa représentation. La notion de conception n'apparaît alors pas nécessaire, le concept de « registre sémiotique » rendant compte des trois constituants fondamentaux que sont les signifiants, leur traitement et les règles de conformité.

Ancrage 2 : les « cadres » au sens de Douady

«Nous choisissons pour introduire et susciter le fonctionnement des connaissances, des problèmes où elles interviennent dans au moins deux cadres. Nous privilégions les cadres (en fait, les problèmes) dans lesquels l'imperfection des correspondances est créatrice de déséquilibres qu'il s'agit de compenser. » (Douady, 1984, p.18)

Cette première citation justifie l'intérêt des cadres, dont j'ai montré ailleurs (Balacheff 2002) qu'ils constituent une modélisation au sein des mathématiques de l'état des connaissances de l'apprenant que l'on prend en compte, aussi bien que de l'objet d'enseignement que l'on vise. Les cadres sont du côté des mathématiques. Pour passer des cadres aux conceptions il faut opérer en quelque sorte un changement de référentiel : une conception sera une modélisation cognitive rendant compte des régularités des conduites d'un sujet relativement à un cadre.

« Un cadre est constitué d'objet d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outils, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. » (Douady, 1986 p.11)

Les représentations, langagières ou non langagières, jouent un rôle déterminant dans la caractérisation d'un cadre. En effet, la caractérisation d'un cadre passe nécessairement par celle d'un système de représentation, voire d'un registre sémiotique. Comme cela est le cas pour les conceptions, un système de représentation est ce qui permet de formuler les problèmes accessibles dans le cadre considéré, les moyens de leurs solutions ainsi que ceux de la validation de ces solutions. Ce système de représentation peut avoir une force particulière, marquant le cadre dans lequel il est mobilisé.
Le rôle que nous reconnaissons ici aux représentations dans la caractérisation des cadres est analogue à celui que nous leur avons donné dans la constitution du quadruplet qui caractérise des conceptions — il est en fait repris du rôle donné par Gérard Vergnaud aux signifiants dans la caractérisation des concepts mathématiques. Le parallèle entre cadres et conceptions est ainsi plus manifeste encore : les premiers nous donnent accès à une modélisation mathématique du système [sujet<>milieu], les seconds nous donnent accès à une caractérisation épistémique. C'est cette dualité qu'illustre la figure 7 qui, par ailleurs, souligne le rôle pivot des représentations.

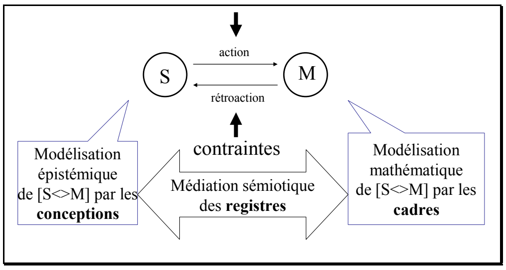


Figure 7. Les registres, pivots entre conception et cadres

Les représentations permettent ainsi la mise en relation entre cadre et conception, à proprement parler une « médiation sémiotique » analogue à celle permettant la mise en relation entre « sens » et « signification » d'un concept, voire la mise en relation entre significations. On peut noter que la force des représentations est parfois telle que, constituées en registres sémiotiques (c'est-à-dire intégrant des règles propres de conformité), elles peuvent paraître se substituer au cadre ou se confondre avec lui.

2.3 La question du contrôle (∑)

La notion de contrôle est ancienne mais, à l'exception des travaux de Margolinas (1993), elle a peu retenu l'attention en didactique des mathématiques, même au sein de travaux portant sur la validation. Cela tient probablement à ce que l'on a en général tenu à garder des distances nettes relativement aux travaux sur la résolution de problèmes (comme ceux de Schoenfeld par exemple), qu'il s'agisse de problématiques cybernétique ou psychologique.

Les contrôles rassemblent :

- Des jugements, des décisions et plus généralement les moyens du choix ;
- Des méthodes, structures et organisations des opérateurs (les métaconnaissances, voir à ce sujet les travaux sur le « méta » de Robert et Robinet, 1996).

Les contrôles permettent les anticipations et la construction éventuelle de plans.

Deux difficultés théoriques et méthodologiques accompagnent toute prise en compte des contrôles :

- Les contrôles sont le plus souvent implicites ;
- La distinction entre contrôles et opérateurs n'est pas absolue mais relative à une conception.

L'illustration de la figure 8, tirée des travaux réalisés pour utiliser cK¢ comme outil de modélisation pour un EIAH, peut suffire à attester de cette difficulté à distinguer contrôle et opérateur.

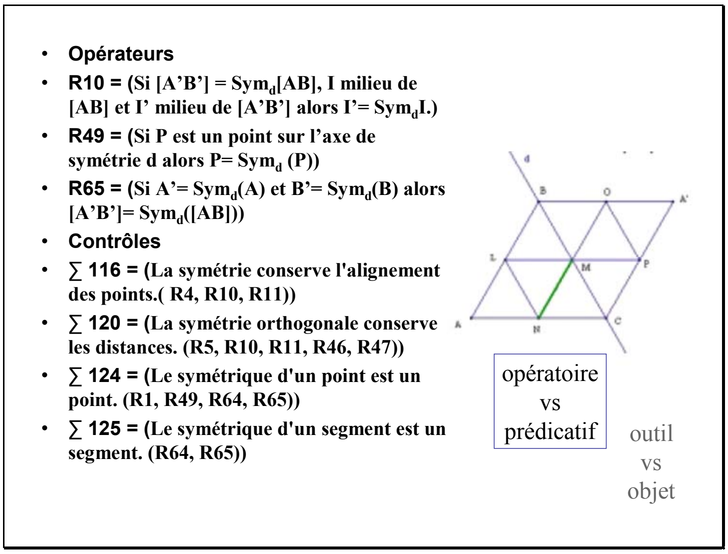


Figure 8. Opérateurs et contrôles

Cette illustration montre bien les deux faces, opératoire et prédicative, d'un énoncé (dualité qui n'est pas sans rappeler celle souligner par Douady à propos d'outil et objet — dualité dont elle a montré le caractère dialectique.)

La considération les contrôles peut permettre de distinguer des conceptions qui par ailleurs paraissent partager les mêmes systèmes de représentation et les mêmes opérateurs.

2.4 Exemple : Le problème des cercles

Deux élèves de Seconde, Vincent et Ludovic, sont dans une situation de résolution de problème dans des modalités expérimentales classiques : ils doivent fournir une solution commune au problème ci-dessous, ils disposent de Cabri-Géomètre. Les dialogues ont été enregistrés pour être, ensuite, analysés du point de vue de l'argumentation et de la preuve. Je m'intéresse ici à un extrait de protocole (repris des travaux de Bettina Pedemonte, 2002) en me plaçant dans la perspective d'une analyse en termes de cadres, de conception et de représentation.

Le problème posé est le suivant :

> A partir d'un segment [AB], on construit un cercle ayant [AB] comme diamètre.

On partage [AB] en deux parties égales, [AC] et [CB]. On construit deux cercles ayant pour diamètres respectivement [AC] et [CB]. On continue à découper les segments résultant en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.
Comment varie la longueur totale des périmètres des cercles ?
Comment varie l'aire totale des disques ?

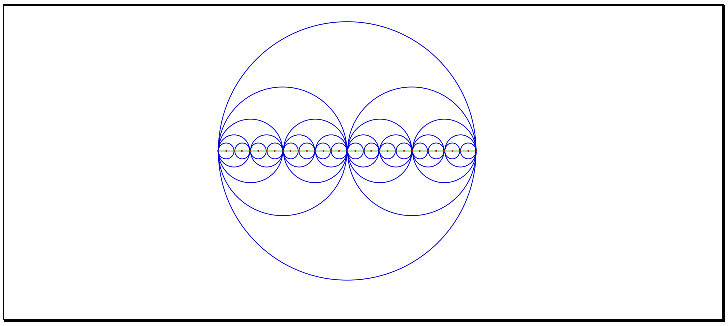


Figure 9. Le problème des cercles

Tracer la figure à main levée — contrairement à ce qui est présenté ci-dessus — fournit aux élèves une évocation graphique de la situation dont le statut mathématique ne s'impose pas d'emblée. La résolution du problème s'engage dans le cadre d'une *arithmétique symbolique* (Balacheff 2001) qui est celle dans laquelle sont décrits les calculs du périmètre et de l'aire d'un cercle.

Au cours de l'échange ci-dessous les élèves mettent en place la conjecture sur le périmètre de la figure. Au premier examen, on peut hésiter sur le fait qu'ils engagent des conceptions relevant de l'arithmétique symbolique, ce que suggère le lien qui est maintenu avec la figure, ou de l'algèbre, ce que suggère la manipulation des expressions.

9. Vincent : le périmètre c'est $2\pi r$ et l'aire c'est πr^2
10. Ludovic : oui
11. Vincent : mais comment évolue le rayon déjà ? r est divisé par 2 ?
12. Ludovic : oui, le premier périmètre est $2\pi r$ et le deuxième est $2\pi r$ sur 2 plus $2\pi r$ sur 2 et donc …. ça va être le même
13. Vincent : et oui…
14. Ludovic : et ça va à être toujours le même parce que… Regarde ! on va appeler r au premier, r est le rayon du premier, le premier cercle a le périmètre…
15. Vincent : $2\pi r$
16. Ludovic : $2\pi r$, et la somme des deuxièmes est $2\pi r$ sur 2
17. Vincent : plus $2\pi r$ sur 2 donc $2\pi r$…. Etc… l'autre est $2\pi r$ sur 4 mais pour 4 fois
18. Ludovic : donc la somme est toujours $2\pi r$
19. Vincent : c'est toujours le même périmètre….

Vincent et Ludovic paraissent en parfait accord pour considérer que la somme des périmètres des cercles est constante, quel que soit le nombre d'itérations de la construction. Les élèves abordent ensuite la question de l'aire de la figure :

20. Ludovic : oui, par contre, l'aire… l'aire c'est πr2 au carré
21. Vincent : là on va avoir …
22. Ludovic : hum… Ça va être divisé par 2 à chaque fois
23. Vincent : oui, π(r/2)2 plus π(r/2)2 est égal à
24. Ludovic : est égal à… πr2/2
25. Vincent : oui c'est comme ça en divisant par deux
26. Ludovic : oui, et donc c'est toujours la moitié de la précédente

[…]

31. Vincent : l'aire est à chaque fois divisée par deux… et à la limite? A la limite c'est une droite, confondue avec le segment de départ…
32. Ludovic : mais l'aire est divisée par deux à chaque fois
33. Vincent : oui, mais à la limite arrive à zéro
34. Ludovic : oui c'est vrai que si on continue…
35. Vincent : elle tend à zéro

27. Ludovic : oui elle tend à zéro l'aire

À nouveau, l’accord paraît gagné : l’aire de la figure à l’étape n de la construction sera de la forme $\pi r^2/2n$ et donc tendra vers zéro avec n. En fait, il n’en est rien :

28. Vincent : oui mais alors le périmètre ?
36. Ludovic : non, le périmètre est toujours le même
37. Vincent : au pire le périmètre il tombe jusqu'à deux fois le segment
38. Ludovic : comment ?
39. Vincent : ça tombe sur le segment… si les cercles sont tellement petits
40. Ludovic : hum… mais ce sera toujours $2\pi r$
41. Vincent: oui mais quand l'aire tend à zéro ça sera presque égale…
42. Ludovic : non, je pense non
43. Vincent : si on fait tendre à zéro l'aire on fait tendre le périmètre aussi… je ne sais pas…
44. Ludovic : je finis la première démonstration
45. Vincent : mais, si on fait tendre l'aire à zéro, on pourrait faire tendre le périmètre à deux fois le… au diamètre du premier
46. Ludovic : c'est différent, le périmètre est constant
29. Vincent : ah d'accord…

Ludovic termine d'écrire la démonstration. Les élèves ne se parlent plus. Je reproduis ci-dessous cette démonstration qui atteste de la bonne maîtrise du cadre algébrique de Ludovic, il en va autrement de Vincent comme nous le verrons dans l’analyse qui suit.

Notons R le premier rayon (R=AB)
1) Soit P_1, P_2, P_4,… les périmètres respectifs du premier cercle, des deux seconds, des quatre troisièmes,…
$P_1=2\pi R$
$P_2=2\pi R/2 +2\pi R/2 = 2\pi R$
$P_4=2\pi R/4+2\pi R/4+2\pi R/4+2\pi R/4=2\pi R$
…
$P_n=2\pi R/n+2\pi R/n +2\pi R/n +\ldots+2\pi R/n =2\pi R$
< ------------- n fois ------------ >
donc le périmètre est constant
2) Soit A_1, A_2, A_4,… les aires respectives du premier cercle, des deux secondes, des quatre troisièmes,…
$A_1=\pi R^2$
$A_2\ \pi R^2/4+\pi R^2/4=\pi R^2/2=A_1/2$
$A_4=\pi R^2/16+\pi R^2/16+\pi R^2/16+\pi R^2/16=\pi R^2/4=A_1/4$
…
$A_n=\pi R^2/n^2+\pi R^2/n^2+\ldots+ \pi R^2/n^2=\pi R^2/n^2 * n= \ =\pi R^2/n = A_1/n$
donc l’aire tend vers zéro quand n augmente

Si Ludovic est dans le cadre algébrique, comme le montre les échanges avec Vincent et la démonstration qu’il rédige et mobilise une conception que l’on peut qualifier d’algébrique, il n’en va pas de même pour Vincent. Ce dernier manipule les écritures littérales, évocatrices de l’algèbre, mais sous le contrôle de l’évidence perceptive : la figure s’écrase sur le segment, son aire tend vers zéro et son périmètre vers la longueur du segment. La conception de Vincent est de type « arithmétique symbolique », conception dont le système de représentation et les opérateurs sont empruntés de l’algèbre mais dont la structure de contrôle est marquée par le retour à la situation modélisée.

Le milieu pour Vincent est celui des objets de la géométrie, représentés et manipulés dans le registre graphique et sur lesquels il réalise des expériences mentales. Deux cadres interagiraient donc : géométrique et algébrique, mais le géométrique est ici, en fait, le monde matériel de l’interface. En revanche, le milieu pour Ludovic est celui des écritures algébriques dont il suit la syntaxe ; il travaille dans le cadre algébrique au sens où l’entend Douady.

Le système de représentation de l’algèbre assure un lien entre la conception de Vincent et celle de Ludovic, en revanche le système de représentation graphique n’a pas le même statut dans les deux cas. Pour Ludovic, cette représentation permet de passer au cadre algébrique en guidant les premières écritures ; il ne reviendra pas au dessin. Pour Vincent, la représentation constitue le domaine phénoménal qui permet le contrôle de ce qui est représenté par les expressions littérales — *de visu* ou au terme d'une expérience mentale.

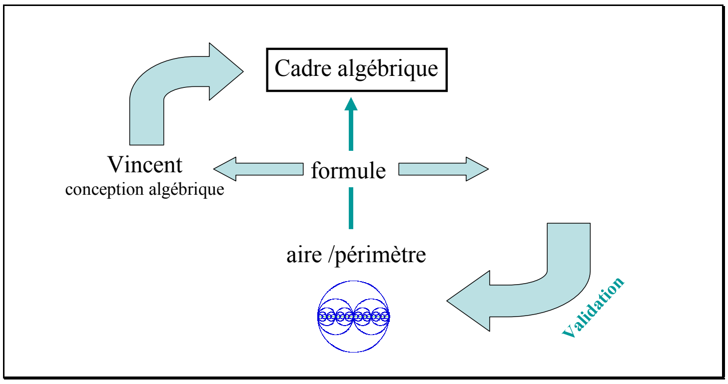


Figure 10. Jeu de cadres et conceptions

La représentation, ici la formule algébrique, joue un rôle pivot à la fois entre les conceptions des élèves et entre les cadres sur lesquels chacun s'appuie. La conception algébrique de Ludovic lui permet d'exploiter pleinement la propriété d'être un registre sémiotique de l'écriture algébrique, notamment en s'appuyant sur les règles de conformité de ce registre. Vincent, quant à lui, en reste à la force ostensive du système de représentation relativement à la situation, c'est-à-dire sa capacité à donner à voir des propriétés qui devraient être lues directement sur la figure que les élèves ont construite.

Entre les cadres ce même pivot a la force d'une médiation sémiotique, il permet le passage du cadre dans lequel est posé le problème (celui des objets de la géométrie et de leurs propriétés métriques exprimées par des formules) au cadre algébrique. Entre les conceptions il permet les interactions et le dialogue entre les élèves, voire leur coopération (voir les deux premiers extraits) jusqu'au point où ils investissent la représentation commune de significations et de modes de fonctionnement différents, notamment sur le terrain de la validation.

Le lecteur pourra résoudre le problème posé dans chacun des cadres, algébrique et arithmétique symbolique, pour constater que cela est possible pour autant que, dans le second cas, on dépasse le paradoxe suscité par le rapprochement de ce que « dit » le calcul et de ce que « montre » le dessin — ce que Vincent ne parvient pas à faire. On constatera aussi que la résolution correcte de ce problème demande une maîtrise du raisonnement par récurrence — qui fait défaut à Ludovic et qu'il dépasse par une représentation — et du traitement des suites numériques.

III. RELATIONS ENTRE LES CONCEPTIONS

Nous introduisons dans ce paragraphe deux relations fondamentales entre conceptions : la généralité et la fausseté.

1. Généralité d'une conception

Ce premier type de relation entre deux conceptions est directement lié à la propriété de localité d'une conception dont on a souligné au début de ce cours qu'elle avait marqué les premières thématisations de cette notion en didactique.

1.1. Exemple : Les nombres décimaux

Avant de donner une caractérisation de la généralité d'une conception, nous proposons d'examiner de ce point de vue un exemple classique ; celui des nombres décimaux considérés sous l'angle des deux conceptions « couples d'entiers » et « entiers à virgule » (nous nous limiterons aux nombres décimaux positifs, c'est-à-dire, en gros, ceux de l'école élémentaire).

- Les nombres décimaux « couples d'entiers » sont ceux de la manipulation de la monnaie. Ils utilisent une écriture décimale des nombres avec une modalité de traitement qui distingue les deux éléments du couple (avec un traitement facultatif des reports, i.e. remplacement d'un « paquet » par un élément d'ordre supérieur).
- Les « entiers à virgule » sont associés à la mesure des grandeurs continues ou discrètes et donc au choix d'une unité. Ils utilisent l'écriture décimale des nombres en association à la gestion de la virgule ; leurs traitements sont analogues à ceux des entiers.

Ces deux conceptions sont ainsi caractérisées

- Par les problèmes de leurs sphères de pratiques respectives, manipulation de la monnaie ou des instruments de mesure ;
- Par des opérateurs et leur organisation éventuelle en procédures ;
- Par des représentations (dont on constate ici qu'elles sont congruentes mais diffèrent par les traitements)
- Par les propriétés des entiers dont elles héritent totalement ou en partie, et les critères propres aux sphères de pratique respectives.

Ces conceptions et la conception mathématique classique $\{a*10^n \ / \ a \in N \text{ et } n \in Z\}$, ne permettent pas de résoudre les mêmes ensembles de problèmes. Ainsi, par exemple l'élévation au carré d'un nombre décimal dans la conception « couple d'entiers », attaché à la manipulation de la monnaie, n'aura pas de sens et ainsi cette dernière paraîtra moins générale que la conception « nombre entier à virgule ». Cette dernière ne donne pas accès à la résolution des problèmes qui nécessite le recours à la propriété de densité, ce que permet la conception mathématique classique.

1.2. Propriété de généralité

Ainsi, la propriété de généralité n'est pas une propriété en soi d'une conception, mais la propriété d'un *couple* de conceptions (propriété dont on peut considérer qu'elle exprime le *point de vue* d'une conception sur une autre). Cette propriété suppose que les problèmes au sens d'une conception puissent être intelligibles au sens d'une autre conception, c'est-à-dire trouver une expression dans son système de représentation.

Si l'on prend en compte non seulement la représentation stricto sensu, mais aussi les traitements associés (et donc le registre sémiotique) on constate que les problèmes intelligibles pour la conception mathématique ne le sont pas pour la conception « couple de nombres entiers » dans laquelle il y a un opérateur entier sur les couples, mais pas de loi de composition interne multiplicative.

Nous pouvons donc reposer le problème de l'observateur, qui croit que le traitement des problèmes pour une conception donnée n'est pas efficace, sans s'apercevoir qu'il considère une classe de problèmes dans sa propre conception, classe qui n'est pas intelligible – on pourrait même dire pas visible – depuis la conception de celui qu'il observe.

1.3 Exemple : Les fractions unaires

Ce rôle de la représentation dans le jugement de généralité est bien illustré par le cas des fractions unaires de l'arithmétique égyptienne antique. L'écriture des fractions unaires utilise deux symboles d'une part l'œil d'Horus et d'autre part des bâtonnets dont la figure 11 donne une indication d'interprétation qui suffit pour les besoins de cet exemple.

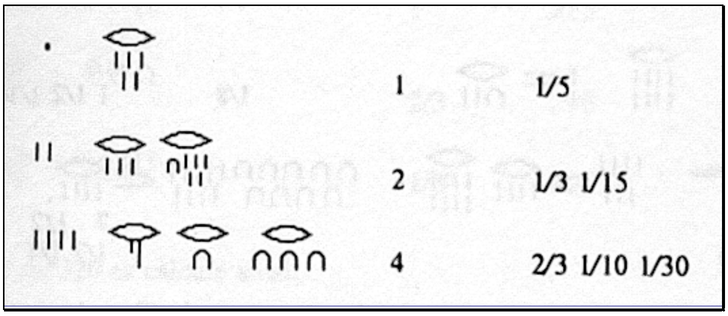


Figure 11. Illustration de la multiplication égyptienne (Couchoud, 1993)

La multiplication, dont Couchoud (figure 11) présente une analyse dans son ouvrage, repose sur l'utilisation de tables qui permettent le passage d'une ligne à une autre. Le traitement de la représentation repose donc sur des principes de réécritures qui s'appuient sur l'utilisation d'une table exhaustive des cas. La réécriture des fractions unaires dans le système de représentation mathématique contemporain fait perdre de vue cette particularité. En fait, les égyptiens ne manipulent pas des fractions, mais font un calcul en nombres entiers sur des parties d'un tout. Plus précisément, comme le rapporte Brousseau : « […] la conception des fractions antiques ne passe pas directement au fractionnement de l'unité, comme notre culture actuelle pourrait nous incliner à le supposer, mais par la commensuration […] » (Brousseau 1998).

1.4. Propriété de généralité : formalisation

La possibilité de passer du système de représentation d'une conception à celui d'une autre conception est ainsi critique pour la possibilité et le résultat d'une comparaison éventuelle.

La propriété de généralité peut alors s'exprimer sous la forme :
C **est plus générale que** C' s'il existe une fonction de représentation f : L'→L telle que $\forall$p $\in$ P', f(p) $\in$ P

Cette définition exprime en particulier que la comparaison de conceptions du point de vue de la généralité n'a de sens que si les problèmes définitoires de C' sont intelligibles pour C et appartiennent à son domaine de validité.

2. Fausseté d'une conception

La marque des conceptions de l'apprenant, et ce qui les a constituées en objets d'étude dans les années 80, est essentiellement leur caractère de fausseté et la résistance de cette fausseté à l'épreuve des réformes de l'enseignement. En témoignent, notamment, les erreurs que l'on considèrera comme des symptômes de ces conceptions, telles que $(x+2)^2 = x^2+4$, ou 1/2+1/3 = 2/5, etc. L'apport significatif de la TSD aura été d'affirmer clairement qu'il s'agit là de symptôme de connaissances au sens plein de ce terme, et non de « *misconceptions* » attestant une sorte de pathos du développement. Autrement dit, bien qu'erronées, ces conceptions ont un domaine de validité au moins aux yeux de celui qui les met en œuvre. Le jugement de fausseté est porté par un observateur en mettant en œuvre des moyens de validation que ne mobilise pas le sujet lui même, ou que le contexte ne lui permet pas de mobiliser.

2.1. Exemple du calcul de l'aire de terrains

Un cas particulièrement significatif est celui, rapporté par De Abreu (1995), des cultivateurs du nord-ouest du Brésil qui utilisaient pour le calcul de l'aire d'un quadrilatère ABCD la formule suivante (figure 12).

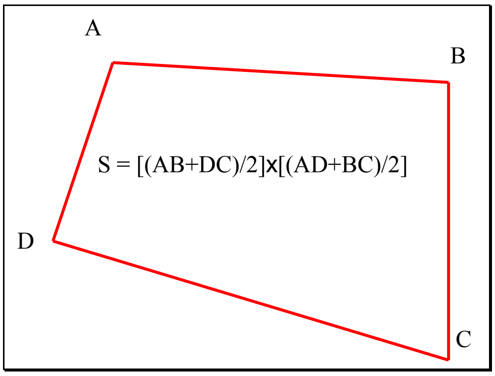


Figure 12. Calcul de l'aire d'un terrain

Cette connaissance, constituée en savoir dans les sociétés qui les mettent en œuvre, n'existe que parce qu'elle fonctionne. On doit donc lui reconnaître une sphère de pratique et une structure de contrôle associée qui permettent la validation des résultats qu'elle contribue à produire. Ici, on estimera que les domaines quadrilatères en question sont relativement rectangulaires, et que les moyens de mesure par ailleurs associés absorbent par leurs approximations les erreurs éventuelles qui seraient à coup sûr inacceptables dans le cas contraire. L'expression de cette procédure avec les moyens algébriques et son examen avec les moyens mathématiques dont nous disposons ne permettent pas d'apprécier son acceptabilité interne ; ils introduisent une sorte d'anachronisme (comme par exemple on le fait en réécrivant les calculs de Kepler).

2.2. Fausseté d'une conception : formalisation

C' est fausse au sens de C s'il existe une fonction de représentation $f : L' \to L$ et $p \in P'$, $r \in R'$, $\sigma' \in \sum'$, $\sigma \in \sum$, tels que $\sigma'(r(p))$=vrai et $\sigma(f(r(p)))$=faux.

Ce que nous pouvons lire en retenant qu'il faut que l'on ait un moyen de représentation qui permette l'intelligibilité pour C des problèmes et opérateurs constitutifs de C', mais dont il existe un cas au moins de mise en œuvre qui est rejeté par la structure de contrôle de C alors qu'elle est acceptable du point de vue de C'.

L'erreur, qui est un diagnostic porté depuis la structure de contrôle de C sur un fait émergent du fonctionnement de C', est alors un symptôme du caractère faux de C' en référence à C.

3. Remarque sur les relations entre conceptions et apprentissage

La problématique de l'apprentissage scolaire est sans doute d'assurer l'éradication des conceptions fausses au profits de conceptions les plus proches possible (dans un sens à préciser) des conceptions associées à l'objet d'apprentissage spécifié par l'enseignement. Bien sûr les choses sont moins simples.

Si on considère le cas des nombres décimaux, chacun reconnaîtra la coexistence fréquente de la conception « couples d'entiers » et de la conception mathématiques, chacune mobilisée dans des sphères de pratiques différentes. Ainsi, l'apprentissage associé au concept est corrélatif de la constitution d'une sphère de pratique spécifique, cette hypothèse permet de mieux comprendre le constat fréquent d'une séparation par les élèves du monde de l'école et du monde extérieur à l'école (séparation qui peut être forte comme le montre les travaux en ethnomathématique).

Les travaux de Castela (1995, voir questionnaire en figure 12) illustrent bien, en analyse, ce phénomène. « Lorsque l'élève aborde le cours d'analyse sur la dérivation, [sa] conception est largement centrée sur les spécificités de la tangente au cercle » d'où il découle de nombreuses erreurs (par exemple dans la tâche de reconnaissance ci-dessous). Mais cette conception disparaît au cours de l'apprentissage. Cependant, note Castela, les élèves manifestent « une extrême réticence à accepter la configuration courbe et tangente localement confondue ».

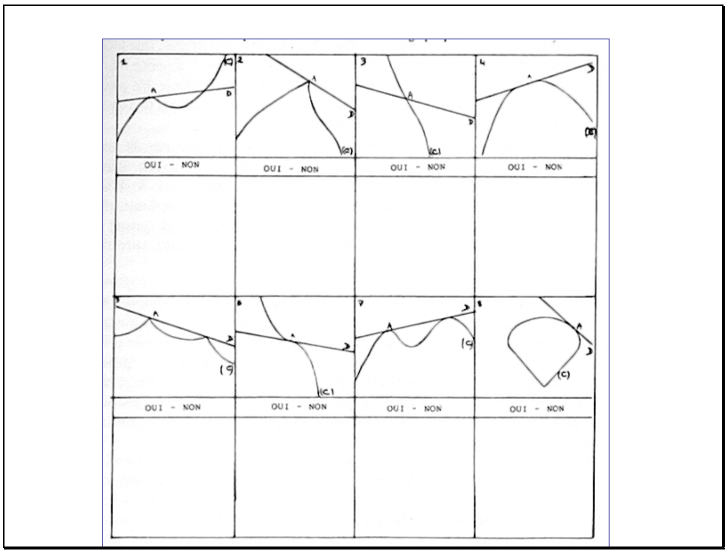


Figure 13. Questionnaire de Castela (1995)

4. Émergence de l'observateur (1)

La caractérisation de propriétés aussi classiques que celles de « généralité » ou de « fausseté » d'une conception, telle que je l'ai présentée ci-dessus, met en évidence que ces propriétés ne sont pas intrinsèques à une conception, mais témoignent de l'existence d'une relation entre conceptions. L'établissement de telles relations dépend de la possibilité de construire une relation de traduction, ou une fonction de représentation qui permette l'intelligibilité d'une conception pour l'autre.

Les représentations, constituées ou non en registres sémiotiques, jouent ainsi un rôle central dans la mise en relation de conceptions. Le jugement d'une conception, en particulier par le chercheur, appelle un examen critique à la lumière des « effets » de traduction ou d'interprétation.

En bref, la construction d'une conception et son attribution à un système [sujet<>milieu] sont assujetties :

- Aux systèmes de représentation qu'elle invoque et à leurs relations aux observables ;
- À la projection de l'observateur dans le processus de modélisation de [sujet<>milieu].

IV. ILLUSTRATIONS ET ETUDES DE CAS

Dans cette section, je donne quelques exemples à titre d'illustration à la fois de la caractérisation des conceptions proposée dans cK¢, et de bénéfices que l'on peut tirer assez rapidement de l'effort de formalisation. Dans la section suivante, j'aborderai la question de l'utilisation de cK¢ pour le calcul de situations didactiques.

1. L'algèbre scolaire

L'algèbre scolaire est un bon exemple de secteur mathématique dans lequel les conceptions du chercheur sont déterminantes pour apprécier le sens même des travaux de recherche présentés.

Dans un article intitulé « The production of meaning in Algebra », Romulo Lins (2001, p.47) présente la situation suivante :

> To calculate how many oranges will fill into each box, we divide the total number of oranges by the number of boxes, i.e.:
>
> $$\text{orange per box} = \frac{\text{number of oranges}}{\text{number of boxes}}$$
>
> If I tell you the total number of oranges, and the number of oranges in each box, how would you calculate the number of boxes used?

Lins explique que la raison pour présenter une formule « algébrique » (« algebraic » formula, dans le texte) était de vérifier si les élèves la constitueraient en un objet qu'ils utiliseraient pour la résolution du problème. Mais, finalement, il relève qu'aucun élève n'a fait référence à cette formule en aucune façon : « they always used a number of something ». Ce qui retient mon attention dans ce cas, ce n'est pas le résultat rapporté par le chercheur, mais plutôt sa conception probable de l'algèbre et de ses relations à l'arithmétique ; non pas sa conception de l'algèbre élémentaire savante dont il est certain qu'elle serait proche de celle de la plupart des mathématiciens, mais sa conception de l'algèbre scolaire. C'est la compréhension de cette conception qui permet de comprendre le résultat rapporté et éventuellement de le discuter.

Analysant plus largement, en utilisant cK¢ comme fil conducteur de cette analyse, le contenu de l'ouvrage « Algebra in School » j'ai pu mettre en évidence deux grandes classes de conceptions de l'algèbre scolaire : d'une part l'arithmétique symbolique et d'autre part l'algèbre (Balacheff 2001). Les deux classes se construisent sur la même sphère de pratique que constituent les problèmes de l'algèbre scolaire (ceux que nous pouvons échantillonner à partir d'un relevé des manuels scolaires) et sur des systèmes de représentation très proches que l'on pourrait réunir sous le nom « d'expressions littérales ». En revanche, les deux classes de conceptions diffèrent nettement par la nature des contrôles qu'elles impliquent : contrôles « externes » par le rattachement à un domaine de référence dans le premier cas, contrôles « internes » liés à l'algèbre comme théorie adossée à un registre sémiotique au sens plein de ce terme (incluant les règles de conformité comprenant la syntaxe du langage algébrique d'une part, et d'autre part les règles de réécriture).

Cette distinction entre les structures de contrôle en suggère une autre sur les sphères de pratiques. En fait, deux grandes classes de problèmes sont abordées dans le cadre de l'algèbre, d'une part les problèmes de modélisation qui ont un fort rattachement à l'arithmétique et à un domaine de référence extérieur à l'algèbre, et d'autre part les problèmes dont la résolution relève essentiellement de la manipulation d'écriture. C'est dans ce dernier cas que nous parlerons d'algèbre dans le contexte des programmes d'enseignement de collège en France.
L'examen de l'économie propre aux conceptions de l'algèbre prise au sens de manipulation des écritures permet ainsi de penser que les CAS (Computer Algebra Systems) sont potentiellement les environnements les plus adaptés pour créer les conditions d'émergence d'un milieu susceptible de favoriser l'apprentissage de l'algèbre. C'est la thèse qui sous-tend le design du logiciel Aplusix (figure 14) dont l'interface donne d'une part accès aux

fonctionnalités de base des CAS, et d'autre part permet l'accomplissement d'actions spécifiques de la pratique algébrique telles que : la reconnaissance de forme dans les expressions, les appariements et l'usages de théorèmes d'algèbre. On peut de ce point de vue considérer le cas des problèmes de factorisation (voir le texte de Marilena Bittar, Alain Bronner, Hamid Chaachoua et Thomas Huguet dans le cédérom). Aplusix permet la réification des opérateurs de réécriture qui sont spécifique de l'algèbre formelle et donc assure une assise pour les contrôles correspondant (métaconnaissances du calcul algébrique).

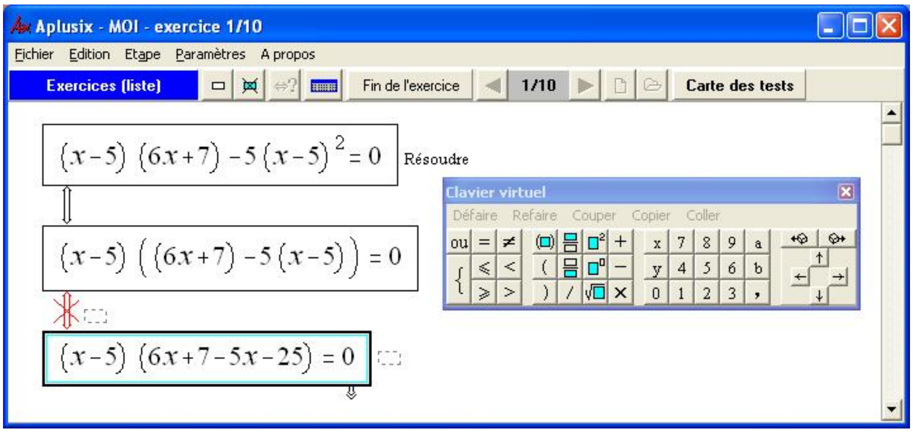


Figure 14. Un écran d'Aplusix

2. Les fonctions

L'analyse fonctionnelle ou de façon plus limitée les fonctions de l'analyse scolaire, offre un excellent terrain de mise à l'épreuve de la modélisation proposée par cK¢ en raison de l'importante diversité des registres mobilisés : registre numérique, graphique, symbolique, etc Et donc potentiellement, la grande diversité des opérateurs et des contrôles associés.

La disponibilité de ces systèmes de représentation et leur utilisation dépend pour la plus grande part du milieu qui sera dévolu par la situation. Ainsi Trouche et Guin (2002) relèvent-ils l'effet suivant selon que des élèves disposent ou non d'une calculatrice graphique :

La question : «La fonction $f(x)=\ln x+10\sin x$ admet-elle pour limite $+\infty$ en $+\infty$?» dépend fortement de l'environnement. Si les élèves disposent d'un grapheur (figure 15), la représentation graphique obtenue induit, du fait de l'oscillation, une réponse fausse dans 25% des cas alors que la proportion est de 5% de réponses fausses sans calculatrice.

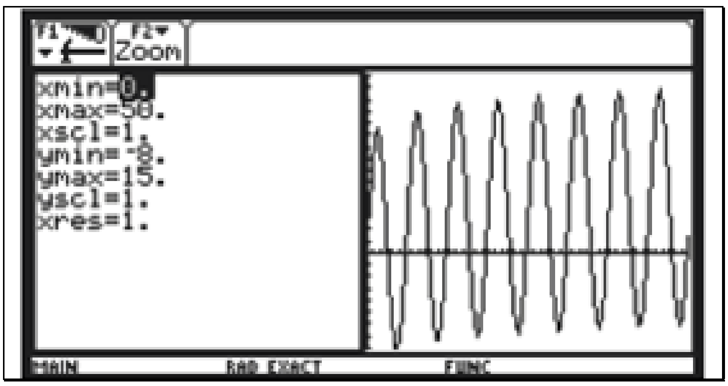
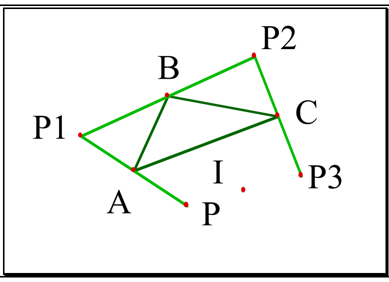


Figure 15. Ecran d'un grapheur pour la fonction $\ln x+10\sin x$

Le texte (présent dans le cédérom) de Nathalie Gaudin, Jana Trgalova et Takeshi Miyakawa illustre la complexité et la variété des conceptions de « fonction » en s'appuyant notamment sur le répertoire des problèmes scolaires de l'étude des fonctions, les représentations langagières, symboliques et graphiques et enfin, les contrôles notamment algébriques (représentation symbolique) ou perceptifs (représentation graphique).

3. La géométrie scolaire

Comme l'algèbre par la variété des classes de problèmes concernées, pratiques ou théoriques, et comme l'analyse fonctionnelle par la variété des systèmes de représentation mobilisables, la géométrie scolaire, notamment lors de premiers apprentissages, est le lieu d'une confrontation – que l'on peut qualifier de dialectique – entre perception et raisonnement qui sous-tend la définition des problèmes scolaires, de l'intrication des représentations graphiques et langagières, et de la co-construction des contrôles « matériels » et théoriques. Cette confrontation est encore plus manifeste dans le contexte de l'usage des environnements de géométrie dynamique qui, à la fois, dramatisent ces contrastes et constituent les meilleurs environnements pour susciter l'émergence d'un milieu pertinent (milieu dans lequel les propriétés géométriques sont phénoménologiquement liées à des invariants perceptifs, figure 16).



« ... quand, par exemple, on bouge P vers la gauche, alors P3 compense vers la droite. S'il monte, alors l'autre descend… »
« … I est le quatrième sommet du parallélogramme ABCI… »

Figure 16. Parallélogramme dans un environnement dynamique

Notamment à la charnière du premier cycle et du second cycle des collèges, les problèmes de géométrie scolaire relèvent de deux classes : d'une part les problèmes de construction demandant une réalisation effective, d'autre part les problèmes de validation d'une proposition. Dans les deux cas les systèmes de représentation sont proches, mais ils ne sont pas mobilisés de la même façon : dans le premier cas le registre graphique occupe une place prépondérante et la construction réalisée relève de règles de l'art, dans le second cas le registre langagier occupe une place prépondérante et le texte produit doit suivre les règles de conformité propres à la démonstration.

Notons que dans le premier cas, les environnements de géométrie dynamique, dont le juge de paix est la robustesse d'une construction dans la manipulation directe, ont renouvelé le sens que l'on peut donner aux règles de l'art du tracé géométrique (un peu perdu du vue dans l'enseignement récent, mais constitutif de l'apprentissage de la géométrie dans la tradition euclidienne). Cette matérialisation du contrôle associé à la réification des fonctions géométrique à l'interface ouvre la possibilité de constitution de milieux nouveaux particulièrement pertinents pour la géométrie. Ainsi que le souligne Maria Alessandra Mariotti (2000), le fait qu'une commande soit activée par l'action sur une étiquette portant le nom d'une propriété géométrique, détermine l'utilisation d'un signe fonctionnant comme un contrôle et un organisateur des actions en relation avec la tâche.

Analysés dans la perspective des conceptions, les environnements de géométrie dynamique mettent en évidence le voisinage de quatre concepts pour la modélisation du système [sujet<>milieu] : conception, cadre, registre et instrument. Nous avons précisé les deux premiers ancrages de la notions de conception relativement à « cadre » et « registre », nous précisons dans ce qui suit ce qu'il en est pour instrument.

Ancrage 3 : « Instruments » au sens de Rabardel

L'outil informatique contraint « non seulement les modes d'action, mais également les modes de pensée de l'utilisateur », Rabardel (1995), pour étudier cette contrainte propose deux concepts fondateurs de son analyse :

- L'outil technique (« l'artefact ») qui est donné ;
- L'instrument qui est construit par le sujet.

Cette distinction est très proche de celle que j'ai proposée plus haut entre « environnement » et « milieu », ce dernier terme étant utilisé avec l'acception qui lui est donnée dans la TSD.

Deux processus peuvent se développer :

- Un processus d'instrumentalisation : enrichissement des propriétés de l'instrument par le sujet
- Un processus d'instrumentation : accommodation des schèmes d'un sujet (invariants de conduite), pour la réalisation d'une tâche.

Cette thématisation de l'instrument et de ses mises en œuvre suggère une caractérisation de l'artefact comme candidat instrument en utilisant les quatre critères :

(i) domaine de tâche,
(ii) fonctionnalités,
(iii) représentation à l'interface et
(iv) modèles de détermination des rétroactions.

L'instrument est ainsi non un donné tangible, mais la propriété d'un dispositif technique – l'artefact – émergente de l'interaction avec un sujet actant ; il est notamment déterminé par la validité et l'efficacité de l'accomplissement de tâches. Ce constat suggère deux remarques :

D'une part, « milieu» et « instrument » ne se distinguent que peu en dehors des problématiques qui les façonnent (respectivement, didactique et ergonomie cognitive) ; plus intéressant encore : ces deux thématisations du système [sujet<>milieu] occupent des places symétriques relativement à l'interaction. Les concepts de conception et instrument occuperaient alors des places duales au sein de la modélisation de ce système.

D'autre part, la problématique instrumentale est appelée par l'effet dramatique de réification de l'action à l'interface des ordinateurs et des contraintes technologiques de modélisation (modèles sous-jacents du feedback).

V. PROBLEMES ET CONCEPTIONS, RELATIONS FONDATRICES

1. Résolution de problèmes et dualité des conceptions

Les problèmes sont le résultat d'une perturbation du système [sujet<>milieu]. Ils n'ont pas une existence en soi, mais relativement à la capacité du sujet de les percevoir et du milieu d'en rendre compte.

Les problèmes sont par ailleurs le fondement des conceptions, ce qu'exprime l'aphorisme de Vergnaud et ont par rapport à elles une valeur définitoire.

La relation entre problèmes et conceptions peut être définie de façon canonique, en partant de la définition classique de la résolution de problèmes :

On dira que $\{C_1, ..., C_n\}$ résout P si et seulement si il existe une suite d'opérateurs $(R_{i1}, ..., R_{im})$ dont chaque terme est pris dans l'un des R_i pour i dans $\{1, ..., n\}$ telle que :
- $P_1 = R_{i1}(P)$
- Pour k dans $\{2, ...,m\}$: $P_k = R_{ik}(P_{ik-1})$
- il existe σ de $\sum_{im}$ tel que $\sigma\,(R_{im}(P_{im-1}))=$ vrai

On dira que $(R_{i1}, ..., R_{im})$ est une solution de P

Ce point de vue sur la relation entre conceptions et problèmes permet d'étendre la perspective initiale qui ne considérait qu'une relation définitoire.

De cette définition, nous pouvons dériver canoniquement quelques précisions sur des termes souvent utilisés :

> On dira que le problème P est élémentaire pour la conception C si C résout P.
> On dira du problème P qu'il est spécifique de la conception C si C participe à toute solution de P.

On peut aussi tirer de ces formalisations une vue plus précise de certaines relations entre conceptions. Ainsi, par exemple, on pourra considérer que deux conceptions C et C' sont équivalentes sur un ensemble de problèmes, si et seulement pour tout élément P de cet ensemble, la substitution de C' à C dans une solution de P qui contient C, est encore une solution de P et réciproquement.

2. Comparer des conceptions, le cas de la mesure des longueurs

La recherche conduite par Ratsimba-Rajohn au début des années 80, sous la direction de Guy Brousseau, aborde explicitement la question de la comparaison des conceptions à propos de la mesure des longueurs. Aussi est-il particulièrement intéressant de la reprendre à la lumière de la modélisation des connaissances que je propose dans cK¢. Cette reprise est ici limitée par le matériau utilisé, l'article de Ratsimba-Rajohn de 1982, mais suffit pour les besoins de l'illustration recherchée.

Les deux conceptions en jeu sont celles du fractionnement (C_f) et de la commensuration (C_c).

- La conception « fractionnement » conduit à diviser l'unité U en n parties égales, en en retenant une pour jouer le rôle de nouvelle unité. On dénombre ensuite les nouvelles unités qui ont ensemble la valeur A. Soit p ce nombre, il vient que la U-mesure de A est p/n.
- La conception « commensuration » identifie que p objets identiques à A ont ensemble la même mesure que n objets identiques à U et en déduit que la U-mesure de A est p/n.

L'étude de Ratsimba-Rajohn s'appuie sur la reconnaissance et la prise en compte de contraintes sur la mesure des grandeurs caractérisées par les variables de nature des grandeurs (continue ou discrètes), les tailles respectives, la possibilité de fractionnement ou de report. Ces variables permettent de définir des sphères de pratique potentielles.

Ratsimba-Rajohn rapporte que « lorsque les élèves sont arrivés à obtenir la désignation n×1/p, la difficulté n'est pas de passer algorithmiquement de n×1/p à n/p, […] mais d'accepter que n/p puisse désigner la mesure de l'objet » (ibid. p.106).

Les deux conceptions distinctes et non interchangeables sur des classes significatives de problèmes, sont en revanche équivalentes (c'est-à-dire interchangeables dans des solutions) pour des problèmes impliquant des grandeurs homogènes, fractionnables et de taille manipulable.

Ancrage 4 : « champ conceptuel » au sens de Vergnaud

« Le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques. Sont ainsi constitutifs des structures additives, les concepts de cardinal et de mesure, de transformation temporelle par augmentation ou diminution, de relation de comparaison, de composition binaire de mesures, de composition de transformations et de relations, d'opération unaire, d'inversion, de nombre naturel et de nombre relatif, d'abscisse, de déplacement orienté et quantifié… » (Vergnaud 1991, 147).

Il est à noter que dans cette citation, Vergnaud précise que « le concept de situation n'a pas ici le

sens de situation mais plutôt celui de tâche » (ibid. 146).
On retrouve la notion de champ conceptuel dans la modélisation proposée par cK¢, en considérant que le champ conceptuel d'une conception est un ensemble de conceptions structuré par l'ensemble des problèmes à la solution desquels elles participent.
Le concept de champ conceptuel induit une organisation des conceptions par la médiation des problèmes. En effet :

Une conception C est dans le champ conceptuel d'une conception C' si pour tout problème p, tout ensemble de conceptions qui résout p qui contient C', contient aussi C.

La notion de champ conceptuel et la définition de la résolution de problèmes par un ensemble de conceptions ouvrent la voie à la reconnaissance d'une propriété de dualité entre problèmes et conceptions (figure 17).

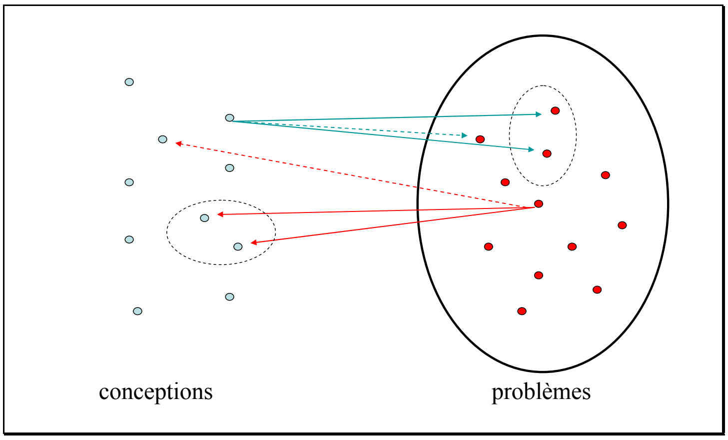


Figure 17. Dualité des problèmes et des conceptions

3. L'objet d'une conception – Emergence de l'observateur (2)

Soit C et C' deux conceptions, et une troisième conception C_0 plus générale que C et C'. On considère deux fonctions de représentation $f : L \rightarrow L_0$ et $f' : L' \rightarrow L_0$ (avec des désignations naturelles). On dira de ces conceptions qu'elles ont le même objet relativement à C_0, si pour tout P, il existe P' intelligible pour C' tel que $f(P)=f'(P')$, et réciproquement.

On notera que le fait que deux conceptions aient le même objet est un jugement formulé depuis une troisième conception et n'a pas de signification intrinsèque ou hors contexte. Dans les faits, c'est-à-dire dans le cadre d'une analyse particulière, cette troisième conception est celle du chercheur ou de l'observateur. Il est important de souligner qu'elle dépend de façon cruciale de l'existence et des propriétés de fonctions de « re-présentation ».

On remarquera, de plus, que le fait d'avoir le même objet n'implique pas d'autres relations éventuelles, telles que l'équivalence, la généralité ou la fausseté (on en a de bons exemples avec le cas des fractions unaires égyptiennes ou celui de la mesure des aires par les cultivateurs brésiliens).

4. Le cas des fonctions

Ce cas, mentionné plus haut, est intéressant par la diversité des conceptions des chercheurs que l'on peut identifier à travers les travaux nombreux sur les conceptions des étudiants (voir les travaux de Nathalie Gaudin, 2002). Le rôle des contrôles y est encore une fois premier, comme en algèbre, pour affiner les distinctions

Cet exemple atteste du rôle clé des représentations, dans le jeu notamment entre milieu et registre sémiotique. La différentiation par les contrôles montre le caractère central et décisif de la problématique de la validation.

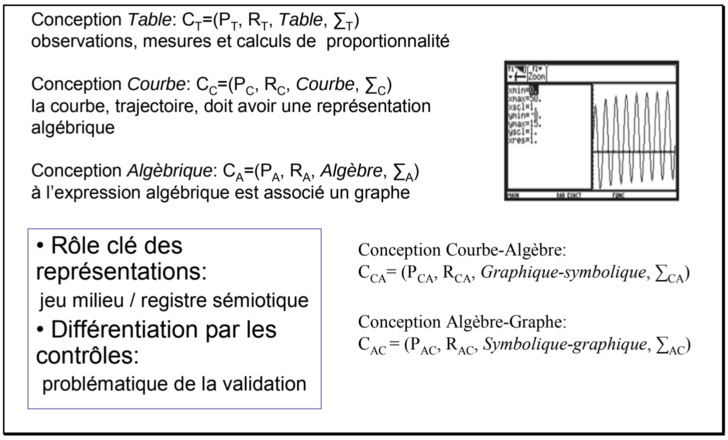


Figure 18. Conceptions des fonctions

VI. CK¢ : CONCEPTION, CONNAISSANCE ET CONCEPT

A ce point du cours, il est possible de préciser les raisons qui ont conduit à choisir le nom «cK¢» pour le cadre de modélisation proposé. En effet, ce cadre permet de clarifier et de préciser les rapports entre concepts souvent utilisés en didactique : *conception*, *connaissance* et *concept*. J'ajouterai une précision pour situer le concept de *savoir* qui fut et reste premier dans la thématisation du didactique.

Une conception est caractérisée par un ensemble définitoire de problèmes pour lesquels elle apporte des outils de résolution en s'appuyant sur un (ou des) système de représentation et une structure de contrôle qui permet jugements et décisions ; cette caractérisation est formalisée (i.e. mise en forme) par le quadruplet (P, R, L, $\sum$).

Cette caractérisation a permis de définir *l'objet* d'une conception, c'est-à-dire en fait une classe d'équivalence de conceptions relativement à l'une d'entre elles. On pourrait aller plus loin et poser le principe d'existence d'une conception plus générale que toutes les autres, et alors aborder la question de l'objet d'une conception de façon généralisée. Une telle conception plus générale paraît hors de portée pragmatique.

On appellera Cμ une conception rendant compte du texte du savoir mathématique.

Contrairement à la conception générale dans l'absolu, Cμ est plus à portée. La conception peut être dérivée du corpus des savoirs consensuels (académiques) en mathématiques dont on sait qu'ils le sont du point de vue des systèmes de représentation qu'ils manipulent et des structures de contrôles (ie la démonstration).

On appellera μ-objet (ou objet mathématique) la classe d'équivalence de conceptions Cμ. Nous appelerons « connaissance » un ensemble de conceptions ayant le même μ-objet.

Il ne s'agit pas de toutes les conceptions qui pourraient être considérées, mais d'un ensemble de conceptions tel que celui d'un élève de quatrième, d'une classe de collège ou d'une époque de l'histoire. Le niveau des connaissances répond à une nécessité épistémique, c'est-à-dire à la nécessité de caractérisation de l'état, dans toute sa complexité, d'un rapport au savoir à un moment donné.

Nous appelerons « concept » un ensemble de connaissances (et donc en fait un ensemble de conceptions).

Le niveau du concept répond à une nécessité ontologique, c'est-à-dire la potentialité de définition d'un objet indépendamment de ses instances. Un bon représentant d'un concept sera la conception Cµ (i.e. la conception la plus générale) qu'on lui associera.

Le niveau « conception », quant à lui, répond à une nécessité cognitive et pragmatique de reconstitution de la caractérisation d'un sujet rationnel cohérent en situation. En effet, alors que l'on exige la cohérence au niveau des conceptions, on en abandonne le principe au niveau « connaissance » ; cette exigence tient à ce que nous nous intéressons au niveau opérationnel du sujet en situation.

On complètera ces précisions en notant que la connaissance est l'instance d'un concept au niveau d'un sujet connaissant singulier ou pluriel, et qu'une conception est l'instance d'un concept par un sujet en situation, c'est-à-dire par le système [sujet<>milieu].

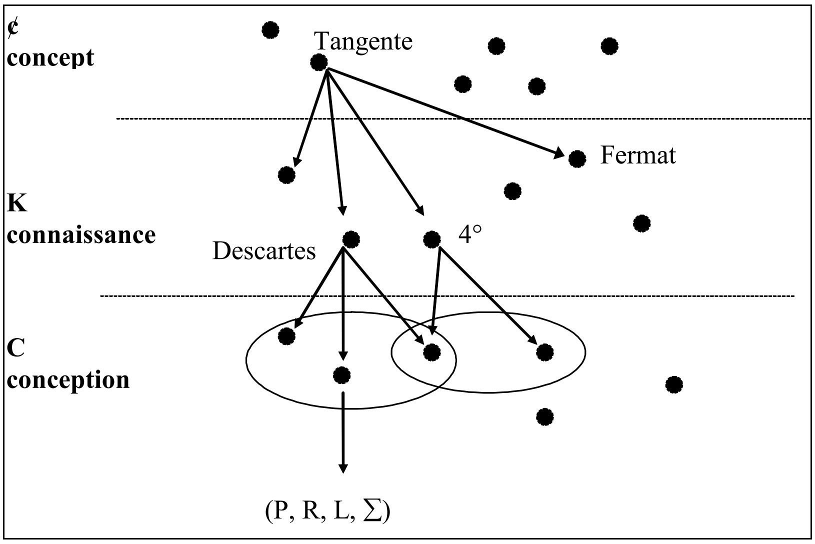


Figure 19. cK¢

VII. LE CALCUL DES SITUATIONS DIDACTIQUES

La possibilité de calculer des situations didactiques est le véritable enjeu de cK¢. L'idée de *calcul* peut paraître ambitieuse, voire choquante pour certains. Elle est en fait directement liée à l'ingénierie didactique et à la pratique méthodologique de l'analyse a priori. Elle devient essentielle comme je l'ai invoqué en introduction, dès lors que l'on voudrait concevoir des environnements informatiques qui auraient la capacité de susciter et d'accompagner des apprentissages humains.

La première étape du calcul d'une situation est de préciser les hypothèses, c'est-à-dire l'enjeu d'apprentissage en termes de conception cible. On constatera au passage que l'objet d'enseignement lui-même peut être caractérisé avec les moyens mis en place pour caractériser les conceptions des élèves (au sens de l'élève en situation).

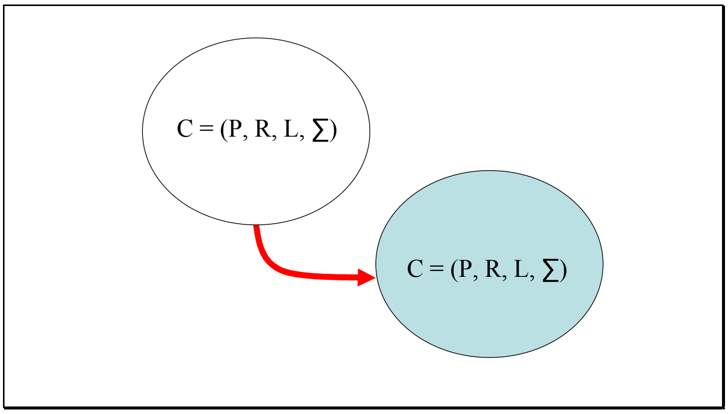


Figure 20. Conception cible

L'enjeu d'apprentissage O, en tant qu'il sera une propriété émergente du système en interaction, conduit à poser des questions premières : quelles conceptions initiales ? quel milieu ? quelles contraintes ? Ces questions permettent de faire le bilan des conditions requises par O : actions et décisions du coté du sujet, actions et rétroactions du coté du milieu, perturbation et dévolution du coté des contraintes.

Illustration1 : La mesure des longueurs

Reprenons par exemple ces questions dans le cas de la mesure des longueurs :

- « Commensuration » sur la grandeur « épaisseur de papier » réinvestie sur d'autres grandeurs (longueur, poids, capacité) et deux phases (mesurage et reconnaissance) ;
- « Fractionnement » sollicité et développé dans une situation où la commensuration est disqualifiée (opérations difficilement praticables dans l'espace disponible) ;
- Problématique de validation de l'équivalence des procédures au regard des mesures produites.

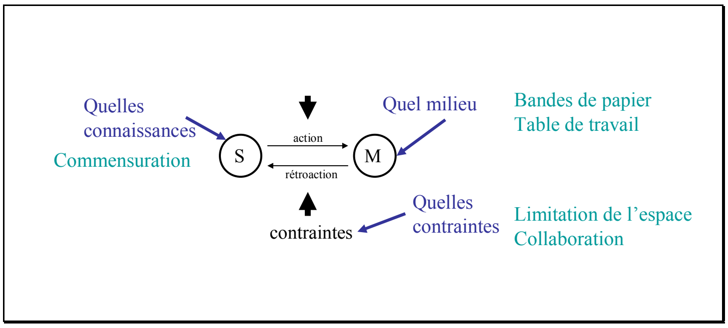


Figure 21. Conceptions de la mesure des longueurs

Illustration 2 : La somme des angles d'un triangle

La propriété d'invariance de la somme des angles d'un triangle porte sur la mesure d'objets géométriques, les angles dans un triangle. La mesure de tels objets appartient depuis longtemps aux pratiques des élèves : mesure du périmètre d'un polygone et notamment d'un triangle, mesure de l'aire et mesure d'angles dont l'étude précède de peu en général l'enseignement de la propriété en question.

En bref, les conceptions initiales des élèves relèvent le plus souvent d'une géométrie pratique dont les systèmes de représentation sont donnés par un langage de la familiarité adapté à la désignation d'action de dessin et à la description d'objets graphiques, des propriétés géométriques sont connues et reconnues lors de l'observation de dessins. Les problèmes de mesures caractéristiques font largement partie de la sphère de pratique de ces conceptions.

La structure de contrôle d'une telle conception contient un oracle du type « plus l'encombrement d'un dessin est grand plus ses caractéristiques métriques sont grandes » ; ainsi, plus le triangle est « grand », plus son périmètre serait grand. Par ailleurs, ces caractéristiques peuvent toujours être déterminées avec assez de certitude avec les instruments de mesure usuels : la question « quelle est la mesure de … ? » a une réponse.

P : activité familière de mesure
R : manipulation des instruments, arithmétique élémentaire
L : dessin géométrique (et constitution associée des objets dans le champ spatio-graphique), représentation numérique et traitement associés, gestes
∑ : règles de l'art, ordres de grandeur, contrôles perceptivo-gestuels et instrumentés.

La question « quelle est la mesure des angles d'un triangle ? », a donc du sens pour les conceptions initiales et les opérateurs et contrôles disponibles permettent d'en envisager la réponse.

Les caractéristiques du système [sujet<>milieu] sont la disponibilité et l'accessibilité d'objets spatio-graphiques, des dessins de triangle et la mesure de leurs angles avec un rapporteur. Le problème de l'invariance de la somme des angles passe par l'apparition d'une incertitude à la fois sur le principe « plus l'encombrement est grand, plus la mesure est grande », et la dévolution de l'incertitude sur le résultat d'une mesure. Les contraintes sur le système [sujet<>milieu] découlent de l'exigence de susciter cette incertitude.

Le tableau 1 donne une présentation synthétique des caractéristiques des situations que l'on peut mettre en œuvre et leurs relations aux conceptions et à leur évolution.

Situation 1 Tracer un triangle, mesurer les angles et calculer la somme des résultats obtenus. Tous les résultats sont présentés au tableau...	Chaque élève proposera le résultat qu'il trouve ; tous les résultats sont a priori acceptables parce que dépendant du triangle particulier tracé par l'élève et de sa procédure de mesure et de calcul
Situation 2 Un même triangle est donné, le même pour tous les étudiants. Un pari, des résultats.	Cependant le pari initial prend en compte la comparaison entre le triangle de la situation 1 et celui proposé. Après cela, les élèves sont confrontés « naturellement » au fait qu'ayant tous le même triangle, les mesures trouvées devraient être les même.
Situation 3 Trois triangles, très différents de forme, sont proposés aux étudiants. Les étudiants sont par groupes de quatre. Un pari, des résultats.	Les paris, selon les conceptions mobilisées, peuvent prendre en compte les différences de forme. La réalisation des mesures, malgré erreurs et imprécision doivent être assez proches pour suggérer la conjecture.
Situation 4 Enoncé d'une conjecture, recherche d'une preuve	Les limites sur la mesure pour répondre à la question, attestée par la situation 2 et la situation 3, doivent permettre de disqualifier cette approche pour répondre aux exigences de validation et susciter la recherche de « preuve » formulées dans un langage permettant l'expression d'arguments intellectuels.

Tableau 1. Evolution des conception de la somme des angles d'un triangle

Passage d'un invariant spatio-graphique à la propriété géométrique, de l'évidence instrumentée à la démonstration, ou à la problématique de la preuve, tels sont les enjeux de la situation que le calcul doit permettre de satisfaire.

3. Processus didactique comme fonction de décision

La projection adidactique du processus didactique fait l'économie des phases de dévolution et d'institutionnalisation. Elle mettent en évidence le problème de la navigation dans le graphe bi-parti conceptions-problèmes (figure 18).

Un processus didactique est alors le produit d'une fonction de décision dont l'argument est un ensemble de conceptions diagnostiquées au terme d'une activité de résolution de problèmes ou de l'accomplissement d'une tâche et dont le produit est un problème ou une tâche.

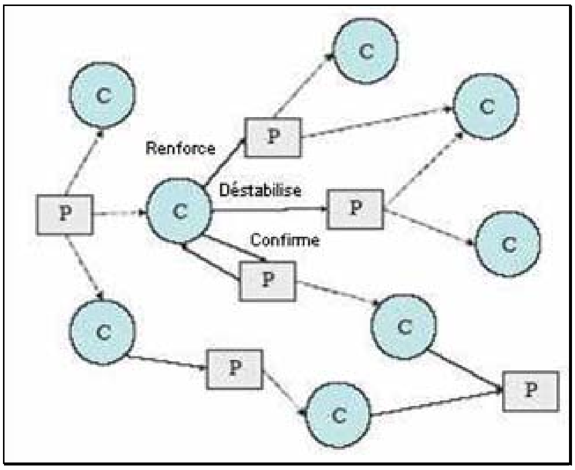


Figure 22. Graphe des problèmes et conceptions

Les problèmes à résoudre sont :

- Caractériser les problèmes ;
- Calculer les transitions ;
- Proximité des conceptions ;
- Recherche de chemins dans le graphe entre conceptions initiales et conceptions cibles.

Ancrage 5 : « les obstacles épistémologiques »

« Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistante. » (Brousseau 1998, p.121)
L'obstacle épistémologique est donc une conception à laquelle on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de son rôle constitutif du sens de la conception visée. Du point de vue du graphe d'évolution des conceptions, l'obstacle correspond à l'existence d'un nœud obligatoire dans la construction d'un chemin (voir figure 18).
La résistance d'un obstacle, c'est-à-dire d'une conception, peut être déclinée selon les quatre caractéristiques de cette conception :
P : résistance liée à l'efficacité dans une sphère de pratique « prégnante »
C'est l'aspect le mieux connu de l'obstacle : « De plus ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une « connaissance » ancienne qui a réussi dans tout un domaine d'actions. » (ibid.)
R : résistance liée à l'existence d'opérateurs éprouvés, parfois implicites
On peut reprendre à ce sujet l'exemple de Brousseau (ibid., p.123) « La résolution des systèmes linéaires par substitution, efficient pour le rang 2, devient matériellement impraticable pour *n* assez grand. »
L : résistance liée aux modifications des représentations
« […] un langage « trop facile » à manier peut bloquer longtemps une reformulation nécessaire… (c'est l'obstacle verbal de Bachelard) » (ibid. p.129)
Σ : résistance liée aux modifications des contrôles
« […] tant qu'on a utilisé les systèmes sexagésimaux des babyloniens pour les calculs astronomiques, la virgule ne s'est pas imposée, ni le nom de l'unité de référence, car une erreur de 1 à 60 était impensable pour qui sait de quoi il parle. »

VIII. CONCLUSION : POURQUOI MODELISER LES CONNAISSANCES ?

Modéliser, c'est donner une forme qui permette le raisonnement, le calcul, pour comprendre et décider.

1. La modélisation des connaissances verrou de la TSD et du design des EIAH

La didactique propose les fondements et énonce les conditions d'une épistémologie expérimentale. La connaissance, comme savoir agi, attestée par les interactions entre un sujet et un milieu, est l'argument de tout processus didactique. L'enjeu d'une situation didactique est la dévolution d'une situation adidactique et le rattachement de ses produits à des savoirs par un processus d'institutionnalisation.

Il faut caractériser le système, les conditions et le contrôle de son évolution. Reprenons le schéma des situations didactiques de validation explicite (Brousseau 1998 p.110), qui englobe les autres situations (action, formulation).

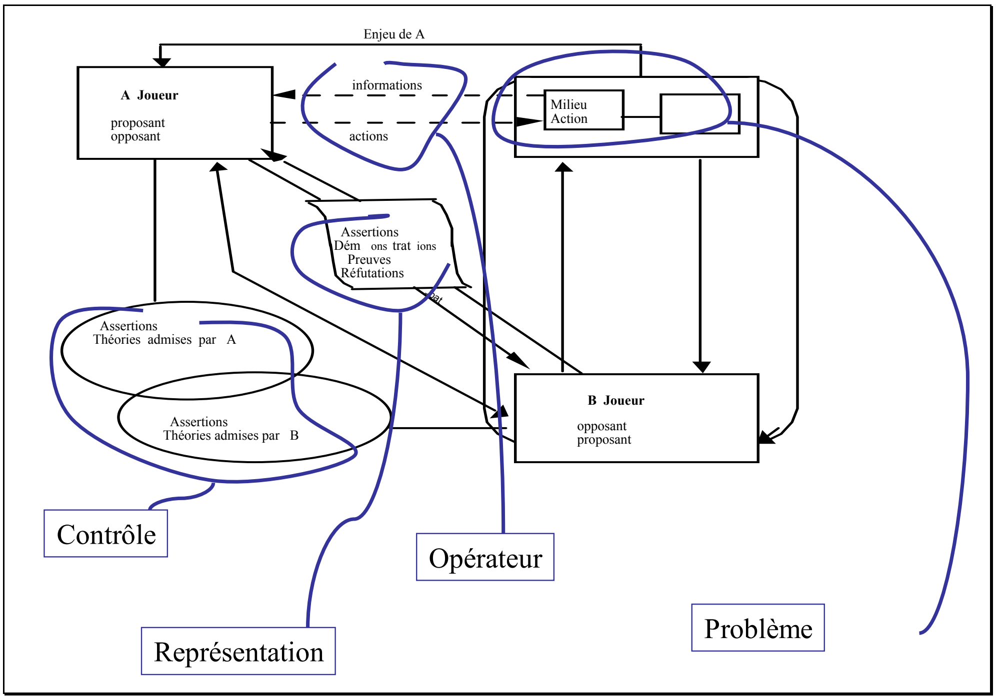


Figure 23. Schéma princeps des situations didactiques

Dans cette situation, toutes les composantes de la conception du « joueur A » sont en jeu : le problème est l'action sur le milieu, mais l'opérateur n'est pas directement disponible pour A, qui doit passer par une représentation entre A et B qui suppose un contrôle de validité. A ce sujet, notons avec Brousseau (1998, p.127) qu'« un problème de validation est bien plus un problème de comparaison d'évaluation, de rejet des preuves que de recherche de la démonstration ».

Un environnement informatique *pour* l'apprentissage humain est un système didactique. La modélisation des connaissances est nécessaire, non pas seulement pour des raisons théoriques mais aussi pour des raisons pratiques de construction contrôlée de ces environnements.

Il s'agit de modéliser le savoir à enseigner, le contrôle et le calcul des interactions, de valider un apprentissage. Cette modélisation s'appuie sur des observables, qu'il s'agit de caractériser, de grouper, pour constituer les arguments du calcul d'un processus didactique. L'observateur, toujours externe dans le cas classique, devient ici interne, sa modélisation est nécessaire.

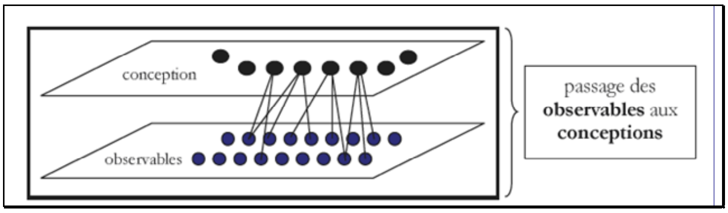


Figure 24. Les conceptions, les observables

2. Deux problèmes commun à la TSD et aux EIAH

Le problème de l'attribution : le chercheur ou l'environnement informatiques dispose de données : des « problèmes », des représentations, des comportements et des productions. La question qui se pose, dans les deux cas, est de juger de l'existence d'une conception à partir de ces données.
Le problème de la proximité de conceptions : l'ensemble des conceptions peut-être muni d'une topologie (dont la zone proximale de développement de Vigotsky est une métaphore de forte valeur heuristique). Concrètement, il s'agit de munir l'ensemble des quadruplets d'un indice de similarité permettant les calculs de trajectoires d'apprentissage – Régis Gras a probablement constitué les base d'une solution possible.

3. Un chantier de recherche très actif

Dans le cadre du modèle cK¢, de nombreux chantiers sont en cours, qui réunissent des chercheurs du laboratoire Leibniz et bien d'autres. Passer de connaissances théoriques à des modèles calculables est un moteur puissant pour contraindre une formalisation efficace.

conception
knowing
concept

Ce cours doit au travail de toute une équipe : Carine Webber, Lucile Vadcard, Jana Trgalova, David Renaudie, Jean-François Nicaud, Vilma Mesa, Takeshi Miyakawa, Iranete Lima, Mirta Gordon, Nathalie Gaudin, Patricio Herbst, Thomas Huguet, Hamid Chaachoua, Alain Bronner, Marilena Bittar

BIBLIOGRAPHIE

Balacheff N., 1995, Conception, connaissance et concept". In: Denise Grenier (ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp.219-244). Grenoble : IMAG.

Balacheff N., 1995, Conception, propriété du système sujet/milieu. In : Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (eds.) *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp.215-229). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Balacheff N., 2000, Les connaissances, pluralité de conceptions (le cas des mathématiques). In: Tchounikine P. (ed.) *Actes de la conférence Ingénierie de la connaissance* (IC 2000, pp.83-90). Toulouse.

Balacheff N., 2001, Symbolic Arithmetic Vs Algebra. The core of a didactical dilemma. In: Sutherland R. (ed.) *Teaching and learning algebra* (pp. 249-260). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff N., 2002, Cadre, registre et conceptions. *Les Cahiers du laboratoire Leibniz*, 58, http.//www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/

Balacheff N. & Gaudin N., 2002, Students conceptions : an introduction to a formal characterization, *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, n°65, http.//www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/

Balacheff N.& Soury-Lavergne S., 1996, Explication et préceptorat, à propos d'une étude de cas dans TéléCabri. In, M. Joab*, Actes des Journées Explication'96*, Sophia-Antipolis, France, pp. 343-356

REFERENCES

Artigue M., 1991, Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 10 n°2/3, 241-285.

Brousseau G., 1998, *Théorie des situations didactiques*, 395p, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Castela C., 1995, Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 15 n°1, 7-47.

Chevallard Y., 1985, *La transposition didactique*, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y., 1992, Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 12 n°1 pp. 73-111, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Couchoud, S., 1993, *Mathématiques égyptiennes: recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique*, Paris, Le Léopard d'or, 208 p.

De Abreu G., 1995, Mathématiques paysannes. *La Recherche*. 278, 800-802.

Duroux A., 1983, La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure, *Petit x* n°3, ed. Irem de Grenoble.

Duval R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine*. Berne :Peter Lang.

Douady R., 1984, *Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*., Thèse d'Etat, Université de Paris VII.

Douady R., 1986, Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7 n°2 pp. 5-31, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Gaudin N. , 2002, Conceptions de fonction et registres de représentation, étude de cas au lycée. *For the Learning of Mathematics* (22)2, 35-47

Leonard F., Sackur C., 1991, Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(2/3) 205-240.

Lins, R., 2001, The production of meaning for algebra: a perspective based on a theoretical model of Semantic Fields; in "*Perspectives on School Algebra*", R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, R. Lins (eds); pp. 37-60, Kluwer Academic Publishers (The Netherlands)

Margolinas C., 1993, *De l'importance du vrai et le faux dans la classe de mathématiques*, 255p., ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Mariotti M.A., 2000, Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, no. 1-2, pp. 25-53(29), Kluwer Academic Publishers

Pedemonte B., 2002, *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Rabardel P., 1995, *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Ratsimba-Rajohn H., 1982, Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 3 n°1 pp. 65-113, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robert A. et Robinet J., 1996, Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 16 n°2 pp. 145-176, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Stewart J., 1994, un système cognitif sans neurones : les capacités d'adaptation, d'apprentissage et de mémoire du système immunitaire. *Intellectika* 18, 15-43.

Guin, D. & Trouche, L. (eds.), 2002, *Calculatrices symboliques, faire d'un outil un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 400 p.

Vergnaud G., 1991, La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(2/3) 133-169.